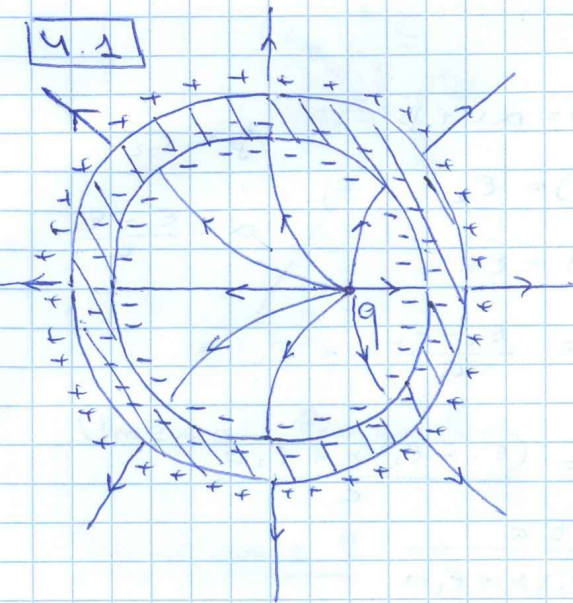


4.1



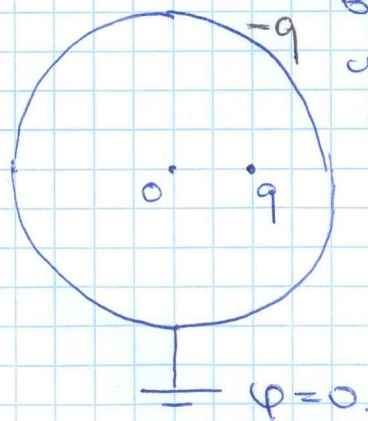
Заряд, находясь внутри сферы вызовет перераспределение своб. зарядов. Т.о. на внутр. оболочке будет индуц. заряд q_0 противоположн. знака, и на внешней $-q_0$.

В силу $\sim$ Гаусса $q_0 = -q$. (см. 3.5)

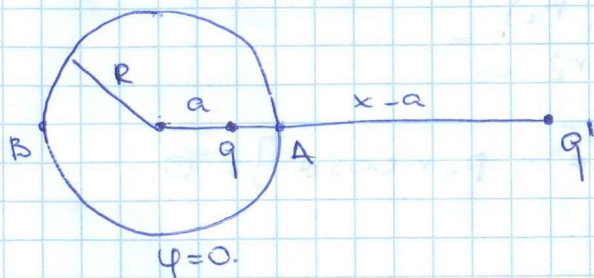
Заряд, находясь на внутр. оболочке, не создает поле заряда q (поле внутри металла $= 0$).

Заряд, находясь на внешн. оболочке не взаимодействует с зарядом q . Потенциал внешн. оболочки равен $\varphi_0 = \frac{kq}{R}$, как и внутренней. Т.о.

образом убрав внешн. оболочку потенциал внутренней станет 0. Следовательно можно переформулировать задачу:



Найти силу, с которой взаимодействие заряд q внутри заземленной сферы с этой сферой.



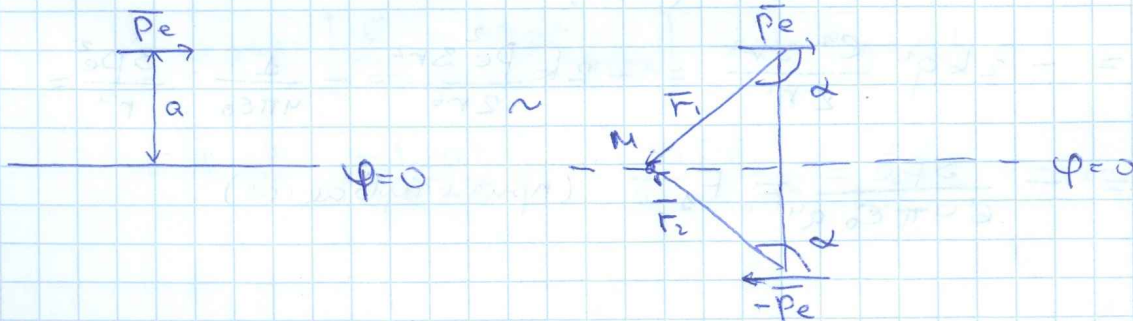
$$\begin{cases} \varphi_A = 0 = \frac{kq}{R-a} + \frac{kq'}{x-R} \\ \varphi_B = 0 = \frac{kq}{R+a} + \frac{kq'}{x+R} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q'R - q'a + qx - qR = 0 & (1) \\ q'R + q'a + qx + qR = 0 & (2) \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) + (2) \\ (2) - (1) \end{matrix}$$

$$\begin{cases} q'R + qx = 0 & \Rightarrow x = \frac{R^2}{a} \\ q'a + qR = 0 & \Rightarrow q' = -q \frac{R}{a} \end{cases}$$

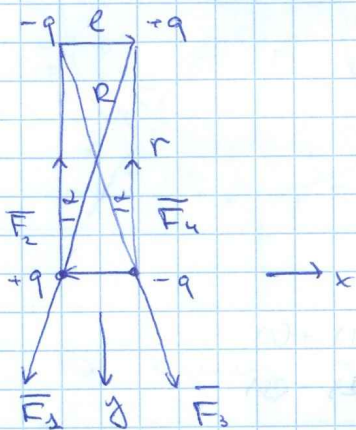
$$F = kq \cdot \frac{q'}{(x-a)^2} = kq^2 \frac{Ra}{(R^2 - a^2)^2}$$

4.3 a)



$$\varphi(M) = \frac{\overline{Pe}\overline{r_1}}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{(-\overline{Pe}, \overline{r_2})}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} =$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} [Pe r \cos\alpha - Pe r \cos\alpha] = 0.$$



$$x: -F_1 \sin\alpha + F_3 \sin\alpha = 0$$

$$y: F_1 \cos\alpha - F_2 + F_3 \cos\alpha - F_4 \equiv$$

$$F_1 = \frac{kq^2}{r^2} = F_3$$

$$F_2 = \frac{kq^2}{r^2} = F_4$$

$$\ominus \frac{2kq^2}{r^2} \cos\alpha - \frac{2kq^2}{r^2} \equiv$$

$$\cos\alpha = \frac{r}{R}$$

$$R^2 = R^2 - r^2$$

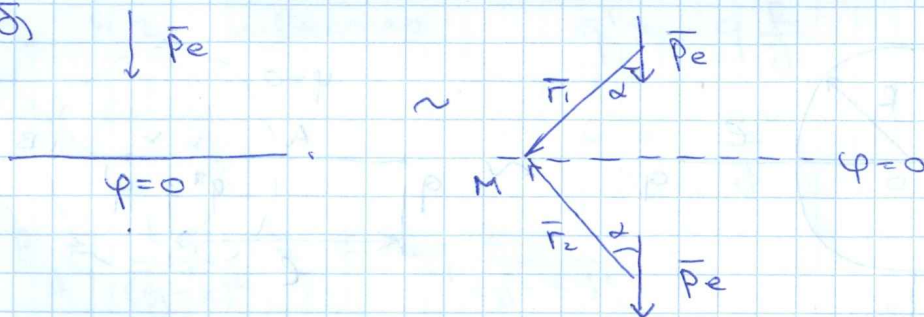
$$\ominus 2kq^2 \left[\frac{r}{R^3} - \frac{1}{r^2} \right] = 2kq^2 \frac{(r-R)(R^2+Rr+r^2)}{R^3 r^2} =$$

$$= -2kq^2 \frac{r^2 (R^2+Rr+r^2)}{R^3 r^2 (R+r)} = -\frac{1}{R} \approx -\frac{1}{r} =$$

$$= -2kq^2 \frac{r^2 3r^2}{2r^6} = -2k \frac{Pe^2 3r^2}{2r^6} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{3Pe^2}{r^4} =$$

$$= -\frac{3Pe^2}{64\pi\epsilon_0 r^4} = F_2 \quad (\text{нпритягивает})$$

8)

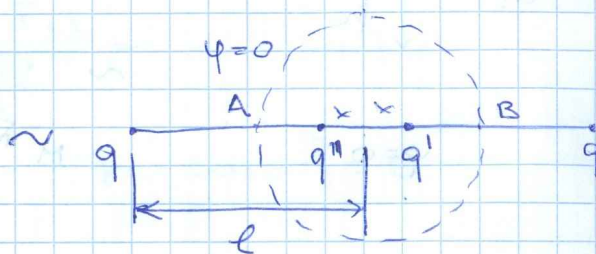
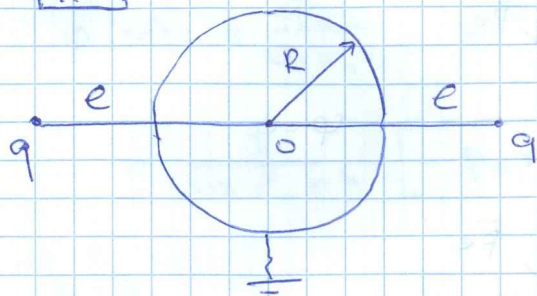


$$\varphi(M) = \frac{\bar{p}_e \bar{r}_1}{4\pi\epsilon_0 r_1^3} + \frac{\bar{p}_e \bar{r}_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p_e r \cos \alpha + p_e r \cos(\pi - \alpha) \right] = 0.$$



$$\begin{aligned} x: F_2 &= 2 \cdot \frac{kq^2}{4a^2} - \frac{kq^2}{(2a+e)^2} - \frac{kq^2}{(2a-e)^2} = \\ &= kq^2 \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{1}{(2a+e)^2} - \frac{1}{(2a-e)^2} \right] = \\ &= kq^2 \left[\frac{1}{2a^2} - \frac{2(4a^2 + e^2)}{(4a^2 - e^2)^2} \right] = \\ &= kq^2 \left[\frac{16a^4 - 8a^2e^2 + e^4 - 16a^4 - 4a^2e^2}{2a^2(4a^2 - e^2)^2} \right] = \\ &= kq^2 e^2 \left[\frac{e^2 - 12a^2}{2a^2(4a^2 - e^2)^2} \right] \approx e \ll a = \\ &= k p_e^2 \frac{-12a^2}{32a^4} = - \frac{3 p_e^2}{32\pi\epsilon_0 a^4} = 2F_1 \text{ (отталкив.)} \end{aligned}$$

4.2

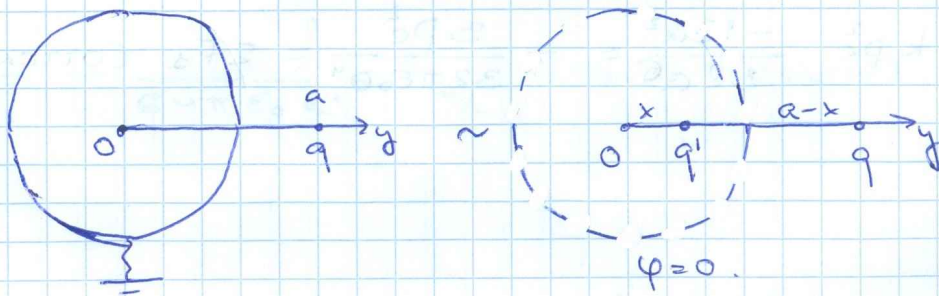


$$e \equiv \frac{a}{2}$$

$$\begin{cases} \varphi_A = k \left[\frac{q}{e-R} + \frac{q'}{R-x} \right] = 0 \\ \varphi_B = k \left[\frac{q}{e+R} + \frac{q'}{R+e} \right] = 0 \end{cases} \quad (u.1) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{R^2}{e} \\ q' = -q \frac{R}{e} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} F &= kq \left[\frac{q}{4e^2} - \frac{q'}{(e+x)^2} - \frac{q'}{(e-x)^2} \right] = \\ &= kq^2 \left[\frac{1}{4e^2} - \frac{Re \cdot 2(e^4 + R^4)}{(e^4 - R^4)^2} \right] = \\ &= \frac{kq^2}{4e^2} \left[1 - \frac{8Re^3(e^4 + R^4)}{(e^4 - R^4)^2} \right] = \\ &= \frac{kq^2}{a^2} \left[1 - 8 \frac{(1 + \gamma^4)}{(1 - \gamma^4)^2} \right], \quad \gamma = \frac{2R}{e} \end{aligned}$$

4.5 2)



уз 4.2 узבעтис.

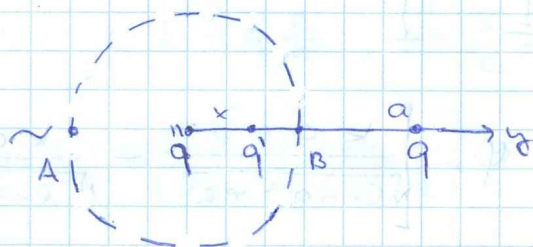
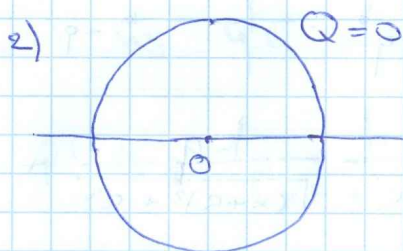
$$q' = -q \frac{R}{y}$$

$$x = \frac{R^2}{y}$$

$$E_y = \frac{kq'}{(y-x)^2} = -kq \frac{Ry}{(y^2 - R^2)^2}$$

$$A = - \int_a^{+\infty} E_y dy = \int_{+\infty}^a - \frac{kqRy dy}{(y^2 - R^2)^2} = - \frac{kqR}{2} \int_{+\infty}^a \frac{dy^2}{(y^2 - R^2)^2} =$$

$$= - \frac{kqR}{2} \int_{+\infty}^{a^2 - R^2} \frac{dt}{t^2} = \frac{kqR}{2} \frac{1}{(a^2 - R^2)} = \frac{qR}{8\pi\epsilon_0 (a^2 - R^2)}$$



$$\varphi_0 = \frac{kq}{y} + \int \frac{k\sigma dS}{R} = k \left(\frac{q}{y} + \frac{Q}{R} \right) = \frac{kq}{y}$$

уз 4.2. узבעтис, $q' = -q \frac{R}{y}$; $x = \frac{R^2}{y}$

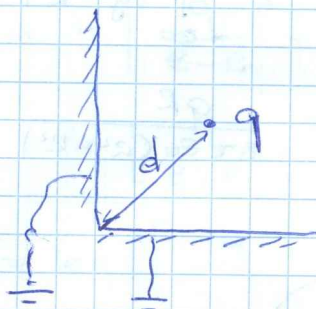
$$\varphi_0 = \frac{kq}{y} = \frac{kq''}{R} \Rightarrow q'' = q \frac{R}{y}$$

$$E_y = \frac{kq''}{y^2} + \frac{kq'}{(y-x)^2} = \frac{kqR}{y^3} - kq \frac{Ry}{(y^2 - R^2)^2}$$

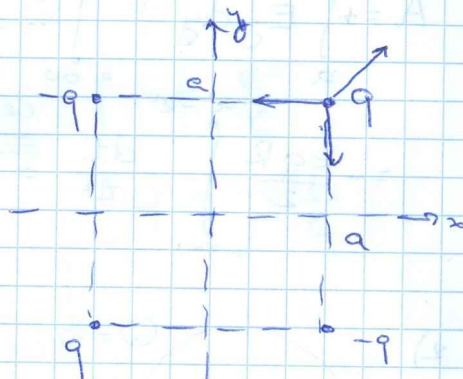
$$A = - \int_a^{+\infty} E_y dy = -kqR \left[- \int_a^{+\infty} \frac{y dy}{(y^2 - R^2)^2} + \int_a^{+\infty} \frac{dy}{y^3} \right] =$$

$$= kqR \left[\frac{1}{2(a^2 - R^2)} - \frac{1}{2a^2} \right] = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{qR^3}{a^2(a^2 - R^2)}$$

4.6



~



$$x: \varphi_x = \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2 + a^2}} +$$

$$+ \frac{kq}{\sqrt{(x-a)^2 + a^2}} = 0 \quad a = \frac{\sqrt{2}}{2} d$$

В силу симметрии $\varphi_y = 0$.

$$\vec{F} = kq^2 \left[\frac{1}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \frac{2}{2d^2} (-1, 0) + \frac{1}{2d^2} (0, -1) \right]$$

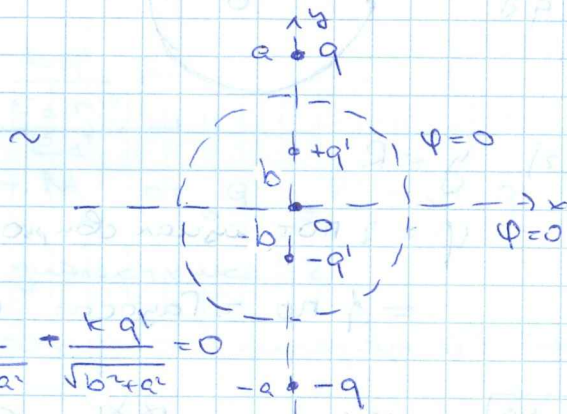
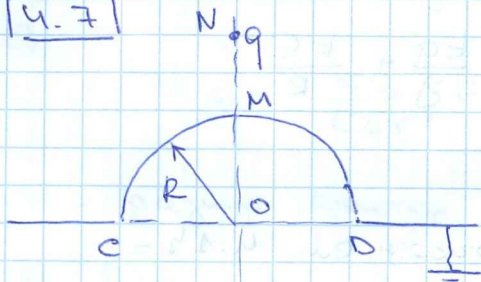
$$x: -\frac{kq^2}{2d^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{kq^2}{4d^2} = \frac{kq^2}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right) = F_x$$

$$y: F_y = \frac{kq^2}{4d^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \right)$$

$$F = \sqrt{2} F_x = - (2\sqrt{2} - 1) \frac{kq^2}{4d^2} = - \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 d^2} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2} \right)$$

$$\vec{F} = F \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2} \right).$$

4.7



$$1) \frac{kq}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2 + a^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \frac{kq'}{\sqrt{b^2 + a^2}} = 0$$

$$2) \text{ из 4.2 известно: } q' = -q \frac{R}{a}; \quad b = \frac{R^2}{a}$$

$$\varphi(x, y, z) = \frac{kq}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{kq}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2}} +$$

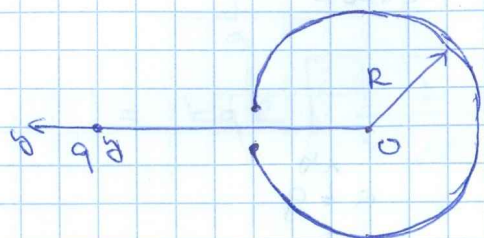
$$+ \frac{kq'}{\sqrt{x^2 + (y-b)^2 + z^2}} - \frac{kq'}{\sqrt{x^2 + (y+b)^2 + z^2}}$$

4.8 Начальное состояние соотв. случаю 4.5.1.

Конечное состояние соотв. случаю 4.5.2.

Тогда легко видеть, что с Земли перетянет заряд $q_0 = -q'' = -q \frac{R}{d}$.

4.9



1) $y \geq R$

$$\varphi = \frac{kq}{y} + \oint \frac{k\sigma ds}{R} =$$

$$= \frac{kq}{y} + \frac{kQ}{R}$$

2) $y \leq R$

$\varphi = ?$ поле вне сферы однородн. см. 4.14 =

= ? по т. Гаусса: $\oint E dS = \frac{q+Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E = k \frac{q+Q}{R^2} y$

4.10

$$\varphi(x) = -\frac{\alpha x^2}{2} + C$$

$$\vec{E} = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} = \alpha x \cdot \vec{i}$$

$\vec{E}$ параллельно оси Ox .

Воспользуемся ур-нем Пуассона:

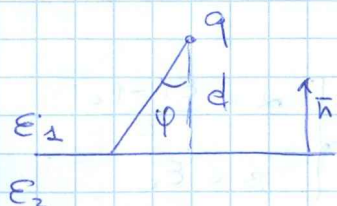
$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x) = -\alpha = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\Downarrow$

$$\rho = +\alpha \epsilon_0$$

Полоса с объёмной плотностью заряда ρ

4.11



1) Посчитаем поле в диэлектр. 1.

Предположим, что оно создается зарядом q и q' (симметр. q).

$$\vec{E}_1 = \frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r} + \underbrace{\frac{kq'}{\epsilon_1 r'^3} \vec{r}'}_{\vec{E}_1'}$$

$\vec{r}$ - радиус вектор в т.М от q , $\vec{r}'$ - от q' .

2) Посчитаем поле в диэлектрике 2.

Предположим, что оно создается зарядом q'' вместо q .

$$\vec{E}_2 = \frac{kq''}{\epsilon_2 r^3} \vec{r}$$

3) E_1 и E_2 должны удовл. граничным условиям.

$$E_{1\tau} = E_{2\tau}: \frac{q}{\epsilon_1} \cancel{\sin \varphi} + \frac{q'}{\epsilon_1} \cancel{\sin \varphi} = \frac{q''}{\epsilon_2} \cancel{\sin \varphi}$$

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma: \quad \text{т.к. против нормали. } (-\vec{n}).$$

$$[q \cos \varphi - q' \cos \varphi] - q'' \cos \varphi = 0.$$

И

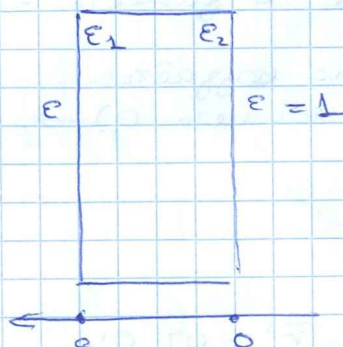
$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

$$\vec{F} = \vec{E}_1' q = \cancel{\frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r}} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{q}{r^3} \vec{r} + \frac{kq^2}{\epsilon_1} = \cancel{\text{нечетная степень}} =$$

$$= - \frac{kq^2}{\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \cdot \frac{1}{4d^2} \vec{n} \text{ (направляется)}$$

4.13

(1)



$$\begin{cases} E(x) = \alpha x + \beta \\ E(0) = E_2 \\ E(a) = E_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{E_1 - E_2}{a} \\ \beta = E_2 \end{cases}$$

$$E(x) = \frac{E_1 - E_2}{a} x + E_2 = \frac{(E_1 - E_2)x + E_2 a}{a}$$

$$E(x) = \frac{D}{E(x) \epsilon_0} = \frac{E}{E(x)} = \frac{E a}{(E_1 - E_2)x + E_2 a}$$

$$E(x) = - \text{grad} \varphi(x) = - \frac{\partial \varphi}{\partial x} =$$

$$\Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} (-E(x)) = E a \frac{E_1 - E_2}{[(E_1 - E_2)x + E_2 a]^2} =$$

$$= \frac{E}{E(x)^2} \frac{E_1 - E_2}{a}$$

$$\Delta \varphi = - \frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{гип-ве Ломмача})$$

$$\rho = - \frac{\alpha \epsilon_0 E}{(x + E_2/a)^2}, \quad \text{где} \quad \alpha = \frac{E_1 - E_2}{a}$$

$$(2) \quad E_1 = 2$$

$$E_2 = 4$$

$$a = 1 \text{ cm} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\alpha = \frac{E_1 - E_2}{a} = -2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1}$$

$$E = 3 \cdot 10^3 \frac{\text{B}}{\text{m}}$$

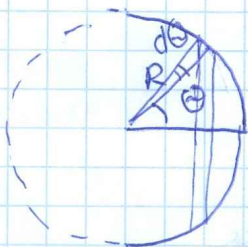
$$P\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{2 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^2} \cdot 3 \cdot 10^3 \frac{\text{В}}{\text{м}}}{(-2 \cdot 10^2 \text{ м}^{-1} \cdot \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} \text{ м} + u)^2} =$$

$$= 5,9 \cdot 10^{-7} \frac{\text{Кл}^2}{\text{Н} \cdot \text{м}^3} \cdot \frac{\text{В}}{\text{Кл}} = 0,59 \frac{\text{мКл}}{\text{м}^3}$$

4.14. Из задачи 3.21 известно, что поле создаваемое на поверхности сферы создает однородное поле внутри сферы.

$$\sigma = \sigma_{\text{max}} \cos \theta = P \cos \theta \quad (3.20)$$

Нернст Бугерса, что $\sigma_{\text{max}} = P = (\epsilon - 1) \epsilon_0 E$



$$S_{\text{кольца}} = 2\pi R \sin \theta R d\theta$$

$$dS = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$dq = \sigma(\theta) dS$$

$$Q = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sigma_{\text{max}} \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta =$$

$$= 2\pi \cdot \sigma_{\text{max}} R^2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\sin 2\theta}{2} d(2\theta) =$$

$$= \sigma_{\text{max}} \pi R^2 \left. \frac{1}{2} [-\cos 2\theta] \right|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \sigma_{\text{max}} \pi R^2$$

4.15) (задача абсолютно аналогична 4.12)

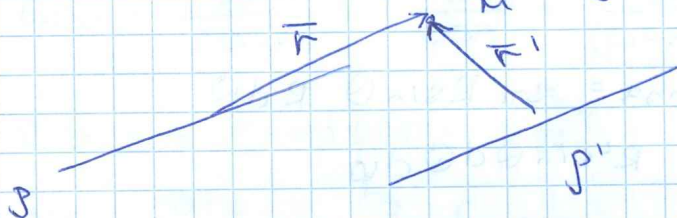
1) Найдем поле в 1-й зоне.

Предположим, что оно создается только p и только p' (сним p)

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \left(\frac{p\vec{r}}{r^2} + \frac{p'\vec{r}'}{r'^2} \right) \quad (3.12)$$

$\vec{r}$ - вектор перпенд. к p и проходящий сонаправленно с $\vec{r}$ в з.м.

$\vec{r}'$ - аналогично для p' .

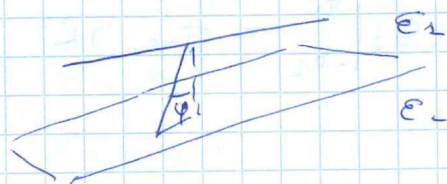


2) найдем поле во 2-й зоне

Предположим, что оно создается только p' внешнего p .

$$\vec{E}_2 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0\epsilon_2} \frac{p'\vec{r}}{r^2}$$

3) граничные условия.



$$E_{z1} = E_{z2}$$

$$\frac{p}{\epsilon_1} \sin\varphi + \frac{p'}{\epsilon_1} \sin\varphi = \frac{p''}{\epsilon_2} \sin\varphi$$

$$D_{n1} = D_{n2} = \sigma : [p \cos\varphi + p' \cos\varphi] - p'' \cos\varphi = 0$$

$$p' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} p$$

$$p'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} p$$

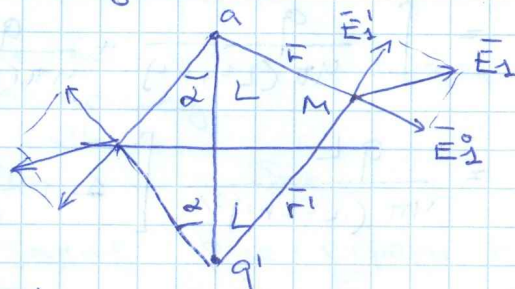
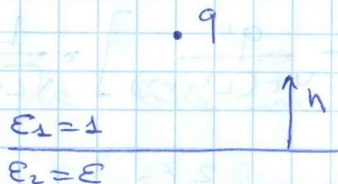
$$F = E_{\perp} dq = \oint \vec{E} \cos \alpha \, r d\varphi, \text{ по окружности } \perp \vec{E} = \text{норм}$$

$$= \frac{-dq}{2\pi\epsilon_0\epsilon_1} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{r'}{r^2} = - \frac{p^2 d\epsilon}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \pi$$

$$\vec{F}_e = \frac{\vec{F}}{d\epsilon} = - \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0\epsilon_1 d} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} \pi \quad (\text{притяжение})$$

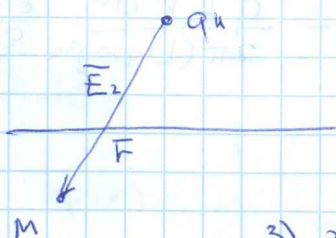
4.16

1) найдем поле $\vec{E}$ (1) области:



$$\vec{E} = \frac{kq}{\epsilon_1 r^3} \vec{r} + \frac{kq'}{\epsilon_1 r'^3} \vec{r}'$$

2) найдем поле $\vec{E}$ (2) области



$$\vec{E}_2 = \frac{kq''}{\epsilon_2 r^3} \vec{r}$$

3) граничные условия:

$$E_{\perp 1} = E_{\perp 2}: \quad \frac{q}{\epsilon_1} \sin \alpha + \frac{q'}{\epsilon_1} \sin \alpha = \frac{q''}{\epsilon_2} \sin \alpha$$

$$D_{\parallel 1} = D_{\parallel 2}: \quad q \cos \alpha - q' \cos \alpha = q'' \cos \alpha$$

$$q' = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q \quad ; \quad q'' = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} q$$

Мы получили точную эквив. картину.
Теперь ~~можно~~ между диэлектриком (ϵ_2) и
вакуумом (ϵ_1) заменить на металлическую
полосу.

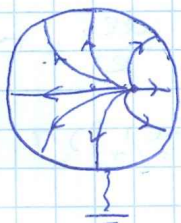
$$\begin{aligned} \sigma(r) &= D_{n1} - D_{n2} = [\epsilon_1 \epsilon_0 E_1 - \epsilon_2 \epsilon_0 E_2] \cos \alpha = \\ &= \left[\frac{q}{4\pi(L^2 + r^2)} + \frac{q'}{4\pi(L^2 + r^2)} - \frac{q''}{4\pi(L^2 + r^2)} \right] \approx \frac{L}{\sqrt{L^2 + r^2}} \\ &= \frac{qL}{4\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \left[1 + \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} - \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \right] = \\ &= - \frac{qL}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + \epsilon_1} = - \frac{qL}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \sigma(r) dr \cdot r = 2\pi \int_0^{\infty} - \frac{qLrdr}{2\pi(L^2 + r^2)^{3/2}} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \\ &= - qL \cdot \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} \int_0^{\infty} \frac{rdr}{(L^2 + r^2)^{3/2}} = \\ &= q \frac{\epsilon - 1}{\epsilon + 1} L \left[\frac{1}{\sqrt{L^2 + x^2}} \right] \Big|_0^{\infty} = - q \frac{\epsilon + 1}{\epsilon + 1} \end{aligned}$$

$$\vec{F} = \vec{E}_1 q = - \frac{E_2 - E_1}{E_2 + E_1} \cdot \frac{\pi}{r^{1/2}} \cdot \frac{kq^2}{E_1} =$$

$$= - \frac{E -}{E + 1} \cdot \frac{kq}{L^2} \pi \quad (\text{притягивается}).$$

4.17 1) Из задачи 3.5 известно, что заряд на внутр. оболочке сферы не взаимодействует с зарядом на внешней оболочке.



Сфера заземлена $\Rightarrow \varphi = 0$.

В случае незаземленной сферы: $\varphi = \frac{kq}{R}$

Т.о. с земли перетечет заряд $-q$ на внешнюю оболочку.

$\Downarrow$

поле вне сферы не будет.

2) На другой заряд вне сферы силы будут действовать, т.к. на внеш. оболочке появится заряд (с земли) такой, чтобы поле внутри сферы осталось прежним. Этот поверхностный заряд и будет взаимодействовать.

4.18

$$\varphi(r) = \begin{cases} a/r & , r \geq R \\ -\frac{ar^2}{2R^3} + \frac{3a}{2R} & , r < R \end{cases}$$

~~$\varphi(r) = \varphi(0) + \varphi(r)$~~

$\varphi(0) = \frac{3a}{R}$ (сфера?)

$q = 12\pi\epsilon_0 R$

~~$\varphi_1 = \begin{cases} a/r - \frac{3a}{R} & r \geq R \\ -\frac{ar^2}{2R^3} & r < R \end{cases}$~~

$$E = -\text{grad} \varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \begin{cases} \frac{a}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{ar}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$D = \epsilon_0 E = \begin{cases} \frac{a\epsilon_0}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{a\epsilon_0 r}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = \frac{a\epsilon_0}{R^3} - \frac{a\epsilon_0}{R^3} = 0$$

(офермы нет?)

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta \varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -\frac{3ar^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \frac{3a\epsilon_0}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

- равномерно
заряженный шар
($r < R$).

4.131

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ a \left(\frac{1}{r} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right), & r < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{a}{r} \quad (r \rightarrow 0) \quad - \text{заряд } q = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} + \underbrace{\begin{cases} -\frac{a}{r} & , r \geq R \\ a \left(\frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R} \right) & , r < R \end{cases}}_{= \varphi_2(r)}$$

$$E = -\text{grad } \varphi_1 = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a}{r^2} & , r \geq R \\ -\frac{a/r}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} -\frac{a\epsilon_0}{r^2} & , r \geq R \\ -\frac{a\epsilon_0 r}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} + \frac{a\epsilon_0}{R^2} = 0$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta \varphi_2 = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi_2}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ \frac{3ar^2}{R^3} & , r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ -\frac{3\epsilon_0 a r^2}{R^3} & , r < R \end{cases} \quad (\text{uap})$$

[4.20]

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0 & , r \geq R \\ a(R^3 - r^3) & , r < R \end{cases}$$

$$\lim_{r \rightarrow 0+0} \varphi(r) = \varphi(0) = aR^3$$

$$E = -\text{grad}\varphi = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ 3ar^2, & r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ 3a\epsilon_0 r^2, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -3a\epsilon_0 R^2 = -\sigma_{\text{ср}} \epsilon_0$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) = \frac{1}{r^2} \cdot \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -12ar^3, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r > R \\ +12a\epsilon_0 r, & r < R \end{cases}$$

4.21

$$\varphi(r) = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ a \left(\frac{1}{r} - \frac{r^2}{R^3} \right), & r < R \end{cases}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{a}{r}, \quad r \rightarrow 0+0 \quad - \text{запас } q = 4\pi\epsilon_0 a$$

$$\varphi(r) = \frac{a}{r} + \varphi_1(r) = \frac{a}{r} + \begin{cases} -\frac{a}{r}, & r \geq R \\ -\frac{ar^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$E = -\text{grad}\varphi_1 = -\frac{\partial\varphi_1}{\partial r} = \begin{cases} -\frac{a}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{2ar}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$D(r) = \epsilon_0 E(r) = \begin{cases} -\frac{a\epsilon_0}{r^2}, & r \geq R \\ \frac{2a\epsilon_0 r}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow R+0} D(r) - \lim_{r \rightarrow R-0} D(r) = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} + \frac{2a\epsilon_0}{R^2} = -\frac{a\epsilon_0}{R^2} \quad \text{— charge}$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \begin{cases} 0, & r \geq R \\ -\frac{6a\epsilon_0 r^2}{R^3}, & r < R \end{cases}$$

$$\rho = \begin{cases} 0, & r \geq R \\ \frac{6a\epsilon_0}{R^3}, & r < R \end{cases} \quad \text{— map}$$

4.22

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} e^{-ar}$$

$$\varphi(r) \sim \frac{b}{r} \quad (r \rightarrow 0+0) \quad \text{— заряд } q = 4\pi\epsilon_0 b$$

$$\varphi(r) = \frac{b}{r} + \varphi_1(r) = \frac{b}{r} + \frac{b}{r} (e^{-ar} - 1)$$

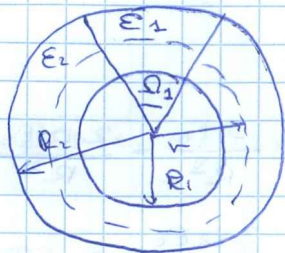
$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{-ab e^{-ar} r - b e^{-ar} + b}{r^2}$$

$$-\frac{\rho}{\epsilon_0} = \Delta\varphi = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dr} \right) =$$

$$= \frac{1}{r^2} [a^2 b e^{-ar} r - ab e^{-ar} + ab e^{-ar}]$$

$\rho = -\frac{a^2 b e^{-ar}}{r} \epsilon_0$
 — map

14.23.



7. Pageca:

$$\oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

$$= \epsilon_1 E \Omega_1 r^2 + \epsilon_2 E \Omega_2 r^2$$

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 r^2} \frac{1}{\Omega_1 \epsilon_1 + \Omega_2 \epsilon_2}$$